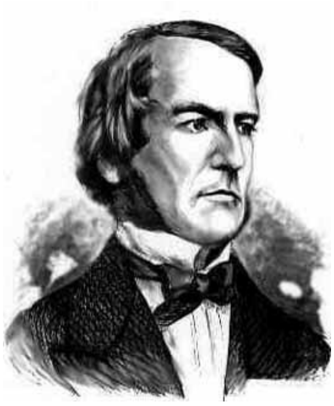
# Algèbre de Boole – Principes de base -Généralités

***George Boole**, [1815, 1864], britannique, logicien, mathématicien et philosophe des mathématiques.*
*Il est un des fondateurs de le logique moderne.*
*En 1854 il montre l'aspect algébriste de la logique pure.*
*Ses idées sont considérées avec celles de De Morgan comme la base fondamentale de l'informatique moderne.*



## 1- Opérations élémentaires

### 1-1 Logique binaire

Dans la suite de cette étude on s'intéresse à des êtres succeptibles de prendre seulement **deux valeurs s'excluant mutuellement**.
Par exemple :
* une proposition peut être vraie ou fausse,
* une lampe peut être allumée ou éteinte,
* un contact peut être ouvert ou fermé,
etc ……..
On convient de représenter ce couple de valeurs
par les nombres « 0 » et « 1 », et d'affecter arbitrairement
la valeur « 1 » à la proposition vraie,
et la valeur « 0 » à la proposition fausse.
L'algèbre de Boole définit les opérations sur ces variables et étudie leurs propriétés.

### 1-2 Définition d'une fonction booléenne

En **algèbre classique**,$z = f(u,v,w)$ , signifie qu'à toute valeur de $u,v,w$ on fait correspondre une valeur de $z$ .

La même définition reste valable en **algèbre logique**, mais la fonction, comme les variables, ne peut prendre que les deux valeurs « 0 » et « 1 ».
Dans les cas où les variables sont peu nombreuses (jusqu'à 6 ou 7) il devient facile d'envisager toutes les combinaisons possibles de leurs valeurs et d'en déduire la valeur de la fonction.
Le tableau correspondant est appelé :
« **table des combinaisons** » ou « **table de vérité** » de la fonction.

Pour traduire la table des combinaisons qui représente la fonction sous forme algébrique, il est nécessaire de définir des fonctions élémentaires que nous appellerons « **opérations** ».

## 1-3 Les opérations élémentaires

### 1-3-1 : « NON » (ou Pas, ou négation, ou complémentation)

| $X$ | $\bar{X}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Notation : « NON X » est noté $\bar{X}$

Dans le cas d'une seule variable, la seule opération envisageable est la négation.

$\bar{X}$ n'est pas égale à X

D'où la table de vérité.

De la même manière si « F » est une fonction de plusieurs variables, par définition :

$\bar{F}$ n'est pas égale à F

On dit encore que $\bar{X}$ (où $\bar{F}$ ) est le complément de $X$ (où de $F$) et réciproquement.

### 1-3-2 : « ET » (ou intersection)

Notation : « **.** » ou rien, comme le produit en algèbre ; on trouve aussi [ ∧ ou ∩ ].

« $F = 1$ » si toutes les variables sont **simultanément égales à « 1 ».**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

F = X**.**Y**.**Z ou F = XYZ

### 1-3-3 : « OU inclusif » (ou réunion)

Notation : « **+** », on trouve aussi [U ou **V**]

« $F = 1$ » si **l'une quelconque des variables, ou plusieurs, sont égales à « 1 ».**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Y | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Z | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| F | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

F = X**+**Y**+**Z ou F = X **V** Y **V** Z

## 1-4 Les trois modes de représentation d’une fonction logique

Dans les définitions fonctions élémentaires précédentes, on a utilisé deux modes de représentation équivalentes :

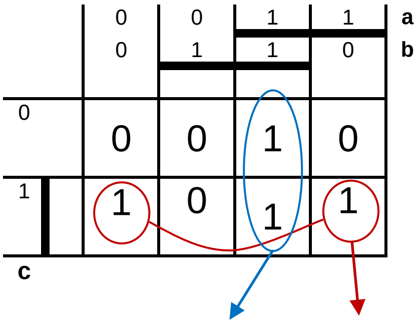
➔ la table des combinaisons,
➔ l’expression algébrique.

Une combinaison des opérations pour obtenir des fonctions plus complexes est possible, et cette fonction peut être représentée par sa table des combinaisons.

Exemple : $Z = a.b + \overline{b}\,.c$

| a | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| c | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Z | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

La table des combinaisons peut être représentée sous un forme plus compacte : c’est la **matrice des combinaisons**.
On range les valeurs des variables conformément au **code binaire réfléchi** et on les indique graphiquement.



| | 0<br>0 | 0<br>1 | 1<br>1 | 1<br>0 | a<br>b |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | |
| c | | | | | |

$$Z = a.b + \overline{b}\,.c$$

A chaque case, correspond une combinaison des valeurs des variables ; on y inscrit la valeur correspondante de la fonction.

## 1-5 Identité de deux fonctions

Il est évident que deux fonctions dont les matrices de combinaisons sont les mêmes sont identiques.
Cela permet de comparer des fonctions dont les expressions algébriques différent et de démontrer éventuellement leur identité.

## 2- Propriétés fondamentales des opérations

### 2-1 : Opérations « ET » et « OU »

#### 2-1-1 : « **associativité** » et « **commutativité** »

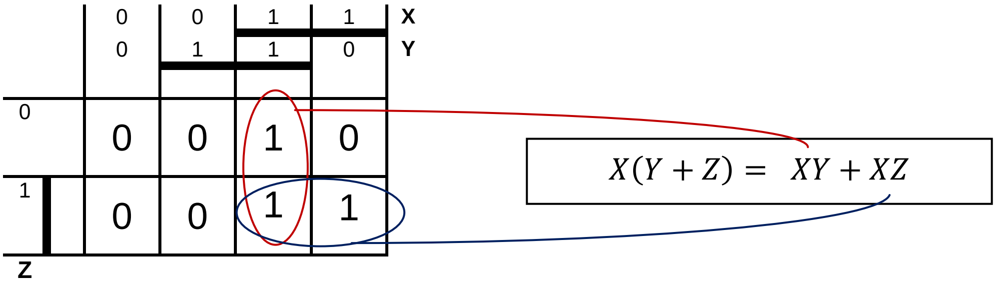
On peut démontrer assez facilement les propriétés ci-dessous :

$$X \cdot Y \cdot Z \;=\; X \cdot Z \cdot Y \;=\; (X \cdot Y) \cdot Z$$

$$X + Y + Z \;=\; Y + Z + X \;= Z + (X + Y)$$

#### 2-1-2 : « **distributivté** »

➔ de « ET » par rapport à « OU »

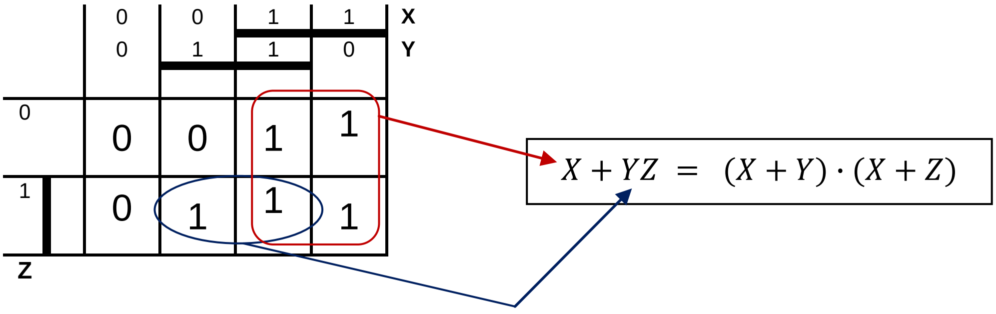


| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 1 | X |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | Y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| Z | | | | | |

$$\boxed{X(Y+Z) = \; XY + XZ}$$

NB : propriété rappelant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition en algèbre classique : a(b+c) = ab+ac .

➔ de « OU » par rapport à « ET »



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 1 | X |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | Y |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| Z | | | | | |

$$\boxed{X + YZ \;=\; (X+Y)\cdot(X+Z)}$$

Dans ce cas pas de propriété équvalente en algèbre classique.

## 2-2 : Opération « NON » - Théorème de Morgan

➔ Cas de deux variables

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | X |
| 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 0 | |
| Y | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | X |
| 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | |
| Y | | | |

$$\boxed{\overline{X\cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}}$$

$$\boxed{\overline{X+Y} = \bar{X}\cdot\bar{Y}}$$

Nous voyons que le complément de l'expression du premier membre est obtenu en prenant les compléments des variables et en permuttant les symboles « **+** » et « **.** ».

On va voir que la méthode se généralise.

==================================

➔ Cas de plusieurs variables

Soit l'expression : $W = X\cdot Y + Z$

dont nous voulons déterminer le complément.

La propriété d'associativité permet d'écrire : $\bar{W} = \overline{X\cdot Y}\cdot\bar{Z}$

$$\bar{W} = (\bar{X} + \bar{Y})\cdot\bar{Z}$$

Pour obtenir le complément d'une expression, il suffit de :

* remplacer les variables par leur complément,

*remplacer les signes « **+** » par « **.** » réciproquement.

Application :

déterminer le complément de $X + \bar{Y}.Z$

la parenthèse, par convention, se met autour de l'opérateur « ET ». Il faut alors respecter les parenthèses pour passer au complément.

donc, $X + (\bar{Y}\cdot Z)$

le complément est alors : $\overline{X + \bar{Y}\cdot Z} = \bar{X}\cdot(Y + \bar{Z})$

## 2-3 : Identités remarquables

Un certain nombres de relations simples sont utiles pour résoudre des problèmes plus complexes.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1a | $0 \cdot X = 0$ | 1b | $1 + X = 1$ |
| 2a | $1 \cdot X = X$ | 2b | $0 + X = X$ |
| 3a | $X \cdot X = X$ | 3b | $X + X = X$ |
| 4a | $X \cdot \bar{X} = 0$ | 4b | $X + \bar{X} = 1$ |
| 5a | $X + XY = X$ | 5b | $X \cdot (X + Y) = X$ |
| 6a | $(X + Y) \cdot (X + \bar{Y}) = X$ | 6b | $XY + X\bar{Y} = X$ |
| 7a | $X + \bar{X}Y = X + Y$ | 7b | $X \cdot (\bar{X} + Y) = XY$ |

Infos : les propriétés ligne 3 (3a et 3b) portent le nom de : idempotence.

Faire les démonstrations de ces indentités :

- * en utilisant la matrice des combinaisons,
- * en utilisant les propriétés faisant l’objet du paragraphe « 2-2 ».

Comment passe-t-on des indentités « **a** » aux identités « **b** » ?

- * appliquer le théorème de Morgan.

## 2-4 : Autres opérations

Les opérations suivantes peuvent s’exprimer au moyen des 3 opérations fondamentales et, à ce titre, pourraient paraître inutiles.
Elles jouent cependant un rôle très important dans la matérialisation des fonctions logiques par des circuits utilisant des transistors.

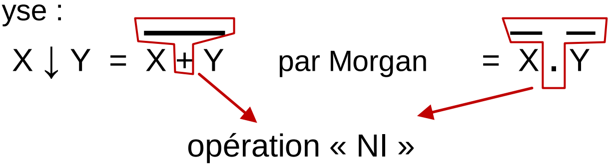
### 2-4-1 : Opération « NI » ( $\overline{\text{OU}}$ ou NOR )

Notation : $\boldsymbol{X} \downarrow$

| | 0 | 0 | 1 | 1 | X |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1 | 0 | Y |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Z | | | | | |

$$X \downarrow Y \downarrow Z = \overline{X + Y + Z} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$$

Analyse :



$X \downarrow Y = \overline{X + Y}$ par Morgan $= \bar{X} . \bar{Y}$

opération « NI »

### 2-4-2 : Opération « ON » ( $\overline{\text{ET}}$ ou NAND )

Notation : $\mathbf{X}/$

| Z \ XY | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

$$X/Y/Z = \overline{X \cdot Y \cdot Z} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

Analyse :

$X \,/\, Y = \overline{X \cdot Y}$ par Morgan $= \overline{X} + \overline{Y}$

opération « ON »

### 2-4-3 : Opération « OU exclusif » (notée aussi XOR)

Notation X⊕

Une fonction, F=1, si un nombre impair de variables est égal à 1

| Z \ XY | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$F = X \oplus Y \oplus Z$$

### 2-4-4 :Propriétés essentielles

➔ « NI » et « ON », dans le cas d'une seule variable :

$$\boldsymbol{X} \downarrow = \overline{\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{X}}$$

$$\mathbf{X}/ = \overline{\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X}} = \bar{\boldsymbol{X}}$$

d'où $\boxed{\bar{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} \downarrow = \mathbf{X}/}$

➔ non associativité des opérations « NI » et « ON »

$$\boldsymbol{A} \downarrow \boldsymbol{B} \downarrow \boldsymbol{C} \downarrow \boldsymbol{D} \downarrow \boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{C}}\bar{\boldsymbol{D}}\bar{\boldsymbol{E}} = \overline{\boldsymbol{ABC}} \cdot \overline{\boldsymbol{DE}}$$

$$\boldsymbol{A} \downarrow \boldsymbol{B} \downarrow \boldsymbol{C} \downarrow \boldsymbol{D} \downarrow \boldsymbol{E} = [(\boldsymbol{A} \downarrow \boldsymbol{B} \downarrow \boldsymbol{C}) \downarrow] \downarrow [(\boldsymbol{D} \downarrow \boldsymbol{E}) \downarrow]$$

Attention : $x \downarrow y \downarrow z \downarrow t \neq (x \downarrow y) \downarrow (z \downarrow t)$

A chaque groupement de « NI » que l'on considère doit être associée une négation

$$A / B / C / D / E = \overline{ABCDE} = \overline{\overline{\overline{ABC}} \cdot \overline{\overline{DE}}}$$

$$A / B / C / D / E = \overline{(A / B / C)} / \overline{(D / E)}$$

➔ Généralisation du théorème de MORGAN aux opérations « NI » et « ON »

Démontrer les identités suivantes qui généralisent le théorème :

$$A / B / C = \bar{\boldsymbol{A}} \downarrow \bar{\boldsymbol{B}} \downarrow \bar{\boldsymbol{C}}$$

$$\overline{\boldsymbol{A} \downarrow \boldsymbol{B} \downarrow \boldsymbol{C}} = \bar{\boldsymbol{A}} \,/\, \bar{\boldsymbol{B}} \,/\, \bar{\boldsymbol{C}}$$

## 3- Expressions algébriques diverses d'une fonction logique

On a vu qu'une fonction logique peut être représentée par sa table de vérité, par la matrice des combinaisons ou par une expression algébrique.
Cette expression algébrique est susceptible de prendre des formes variées.
Soit par exemple, la fonction « F » définie par sa matrice des combinaisons suivante :

|  | 0<br>0 | 0<br>1 | 1<br>1 | 1<br>0 | X<br>Y |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |  |
| Z |  |  |  |  |  |

### 3-1 : Formes canoniques et formes normales

Les formes canoniques et les formes normales sont constituées soit :
par des réunions d'intersections,
par des intersections de réunions.

**Première forme canonique :**

Elle est obtenue en considérant les « 1 » de la matrice des combinaisons.

$$F = (\bar{X} \cdot Y \cdot \bar{Z}) + (\bar{X} \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot Y \cdot Z) + (X \cdot \bar{Y} \cdot Z)$$

*Infos : chaque **intersection**, contenant toutes les variables ou leur complément, est appelée un « **minterm** » (minterm : produit logique contenant toutes les variables).*

A partir de cette forme, par simplification algébrique, on obtient immédiatement :

$$F = \bar{X}Y(\underbrace{\bar{Z} + Z}_{=1}) + YZ(\underbrace{\bar{X} + X}_{=1})$$

ce qui donne : $\boxed{F = \bar{X}Y + XZ}$

qui est appelée première forme normale (*les intersections ne sont plus des minterms*).

**Deuxième forme canonique :**

Elle est obtenue en considérant les « 0 » de la matrice.

$$F = (\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}) + (X \cdot Y \cdot \bar{Z}) + (X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}) + (\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot Z)$$

et, par complémentation :

$$F = (X + Y + Z) \cdot (\bar{X} + \bar{Y} + Z) \cdot (\bar{X} + Y + Z) \cdot (X + Y + \bar{Z})$$

*Infos : chaque **réunion**, contenant toutes les variables ou leur complément, est appelée un « **maxterm** » (maxterm : somme logique contenat toutes les variables).*

Par simplification algébrique on obtient :

$$F = [(X + Y) + Z] \cdot [(X + Y) + \bar{Z}] + [(\bar{X} + Z) + Y] \cdot [(\bar{X} + Z) + Y]$$

$$\boxed{F = (X + Y) \cdot (\bar{X} + Z)}$$

Qui est appelée deuxième forme normale (*les réunions ne sont plus des maxterms*).

## 3-2 : forme « NI »

Une fonction quelconque peut être exprimée uniquement avec des « NI ».
Pour obtenir la forme « **NI** », on fait subir une double négation aux réunions et aux variables des intersections.
en retenant que : $(\overline{\ldots.+\ \ldots.})\sim NI$ et $(\overline{\ldots.}\cdot\overline{\ldots.})\sim NI$

La traduction de la deuxième forme normale de « F » est :

$$F=(X+Y)\cdot(\bar{X}+Z)=\left(\overline{\overline{X+Y}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{\bar{X}+Y}}\right)=\left(\overline{X\downarrow Y}\right)\cdot\left(\overline{\bar{X}\downarrow Z}\right)$$

$$F=(X\downarrow Y)\downarrow[(X\downarrow)\downarrow Z]$$

La traduction de la première forme normale de « F » serait :

$$F=\bar{X}Y+XZ=\overline{\overline{\bar{X}\bar{\bar{Y}}+\bar{\bar{X}}\bar{\bar{Z}}}}=[X\downarrow(Y\downarrow)]\downarrow[(X\downarrow)\downarrow(Y\downarrow)]$$

Il est évident que la 1ère forme qui ne fait intervenir que **4** opérations « **NI** » est préférable à la 2ème forme qui en fait intervenir **6**.

De façon générale, pour traduire une fonction avec des « NI », il vaut mieux, au préalable, la mettre sous la forme d'une intersection de réunions.

## 3-3 : forme « ON »

La forme « **ON** » d'une fonction s'obtient en faisant subir une double négation aux intersections et aux variables des réunions.
Il vaut mieux que la fonction se présente sous la forme d'une réunion d'intersections.
en retenant que : $(\overline{\ldots.\ \cdot\ \ldots.})\sim ON$ et $(\overline{\ldots.}+\overline{\ldots.})\sim ON$

La traduction de la première forme normale de « F » est :

$$F=\bar{X}Y+XZ=\overline{\overline{\bar{X}Y}}+\overline{\overline{XZ}}=[(X/)/Y]\ /\ (X/\,Z)$$

## 4- Symbolisation et logigrammes

Les opérateurs élémentaires de l'algèbre sont matérialisés par des systèmes physiques : optiques, pneumatiques ou électriques.

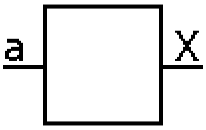
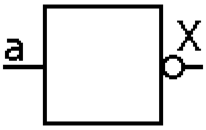
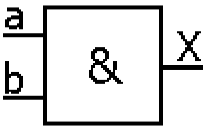
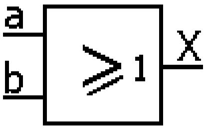
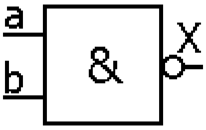
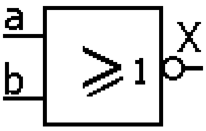
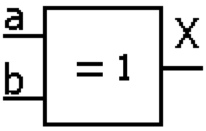
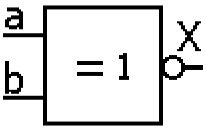
En technologie électronique :

* les variables logiques sont généralement des signaux « bi-tension »,

➔ les opérateurs logiques sont des circuits électroniques appelés « **portes logiques** ».

Les portes logiques matérialisent les opérations de base appliquées à des variables électriques.

### 4-1 : Symbolisation des opérateurs logiques

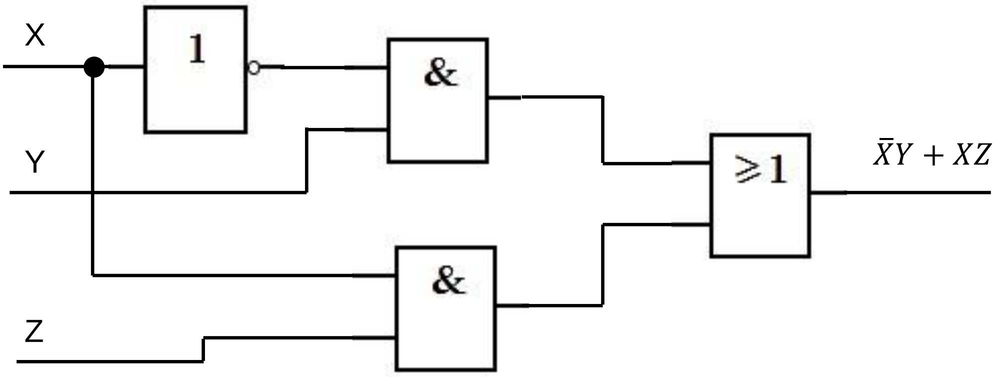
| Opérateur logique ou fonction logique | Symbolisation européenne | Equation logique |
|---|---|---|
| Opération « **OUI** » |  | $X = a$ |
| Opération « **NON** » |  | $X = \bar{a}$ |
| Fonction « **ET** »<br>« AND » |  | $X = a \cdot b$ |
| Fonction « **OU** »<br>« OR » |  | $X = a + b$ |
| Fonction « **NAND** »<br>« **ON** »<br>« ET-NON » |  | $X = a \ / \ b$<br>$X = \overline{a \cdot b}$ |
| Fonction « **NOR** »<br>« **NI** »<br>« OU-NON » |  | $X = a \downarrow b$<br>$X = \overline{a + b}$ |
| Fonction « **XOR** »<br>OU exclusif » |  | $X = a \oplus b$ |
| Fonction « **XNOR** »<br>« équivalence » |  | $X = \overline{a \oplus b}$ |

## 4-2 : logigrammes

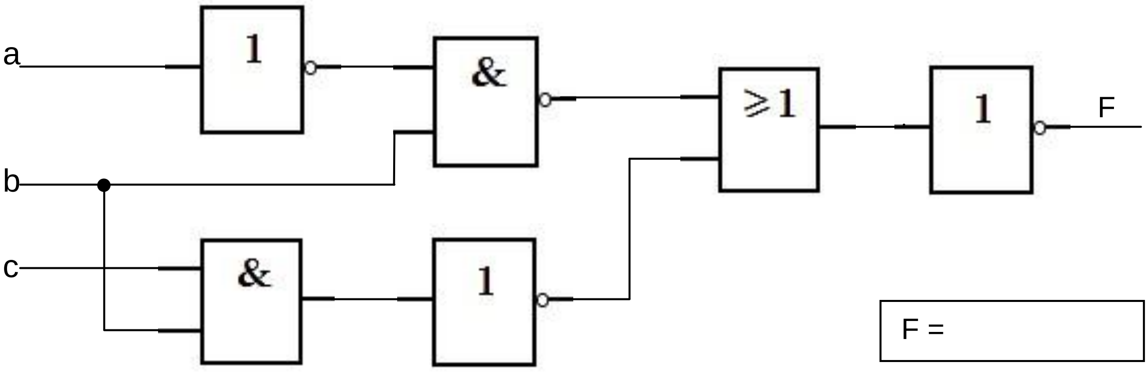
On exprime souvent les fonctions logiques sous forme d’un diagramme schématique, faisant apparaître les relations entre les différents opérateurs élaborant la fonction.

Exemple : Soit la fonction suivante :

$$F = \bar{X}Y + XZ$$



Application : Le résultat d’une étude donne le logigramme suivant.
Retrouver l’expression algébrique de « F » et simplifier, si possible.



F =

( ?) relation simplifiée : $\bar{a}bc$